



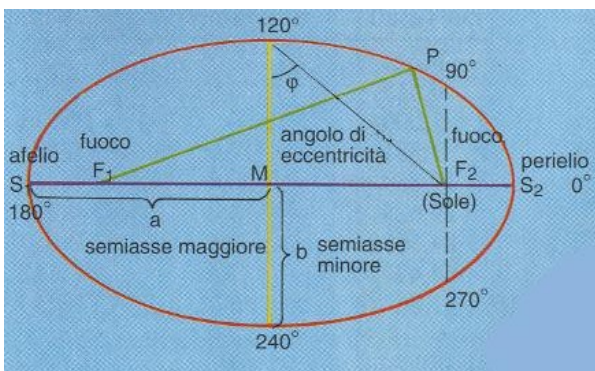
LEGGI SUL MOTO PLANETARIO

Leggi di Keplero

Le leggi sul moto planetario, scoperte da Keplero, dicono:

1. i pianeti si muovono su orbite ellittiche, uno dei fuochi delle quali è occupato dal sole,
2. la linea raggio vettore che unisce il Sole con il pianeta copre aree uguali in tempi uguali (*legge delle aree*),
3. i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi della loro distanza media dal Sole.

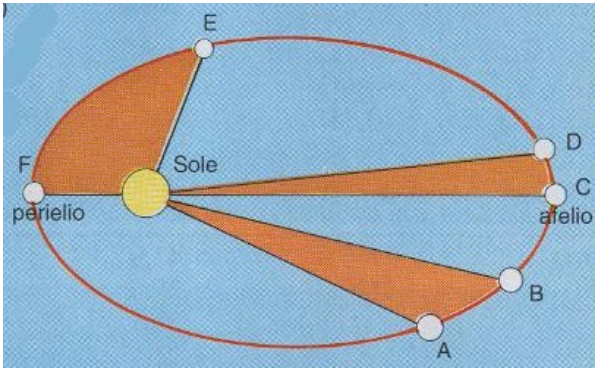
Nel 1906 Keplero pubblicò la sua *Astronomia Nova*, con le prime due leggi del moto planetario (legge delle orbite ellittiche e legge delle aree). L'opera *Harmonices mundi* (1619) contiene la terza legge.



Per comprendere meglio il significato delle tre leggi, si consideri un'ellisse, di cui a sia il semiasse maggiore, b il semiasse minore. I fuochi F_1 e F_2 dell'ellisse godono della proprietà per cui la somma dei segmenti che li uniscono a un punto P sull'ellisse è uguale al doppio del semiasse maggiore, cioè

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

In astronomia viene impiegata l'*eccentricità numerica* e cioè il rapporto tra la distanza di un fuoco dal centro dell'ellisse e il semiasse maggiore: per un cerchio si ha $e = 0$, per un'ellisse e è maggiore di zero ma inferiore a 1. Con $e = 1$ si ha una parabola e con $e > 1$ si ha un'iperbole. Parabole e iperboli non sono curve chiuse e si estendono all'infinito.



La seconda legge di Keplero dice che la velocità di un pianeta all'afelio (massima distanza dal Sole) è minima, e al perielio (minima distanza dal Sole) è massima; la velocità sull'orbita è tale che l'area coperta dal raggio vettore in un determinato tempo rimane costante, qualunque parte dell'orbita si consideri. Se il pianeta impiega 30 giorni per muoversi da A a B, o da C a D, o ancora da E a F, allora i settori ABS, CDS e EFS hanno tutti uguale area.

Nella terza legge di Keplero le distanze medie e i periodi di rivoluzione sono espressi rispettivamente in unità astronomiche e anni. La tabella conferma l'esattezza della legge per i pianeti visibili a occhio nudo e conosciuti all'epoca di Keplero.

La terza legge si può esprimere anche con la formula:

$$a_1^3 : a_2^3 = P_1^2 : P_2^2$$

nelle quali P1 e P2 sono i periodi di rivoluzione dei pianeti 1 e 2 mentre a1 e a2 sono i rispettivi semiassi maggiori. Poiché le masse dei pianeti sono trascurabili rispetto alla massa del Sole, la forma della terza legge di Keplero ora riportata è da ritenersi valida come caso particolare della forma più esatta

$$a_1^3 : a_2^3 = P_1^2 (M + m_1) : P_2^2 (M + m_2)$$

nella quale M è la massa del Sole e m1 e m2 sono le masse dei pianeti 1 e 2.

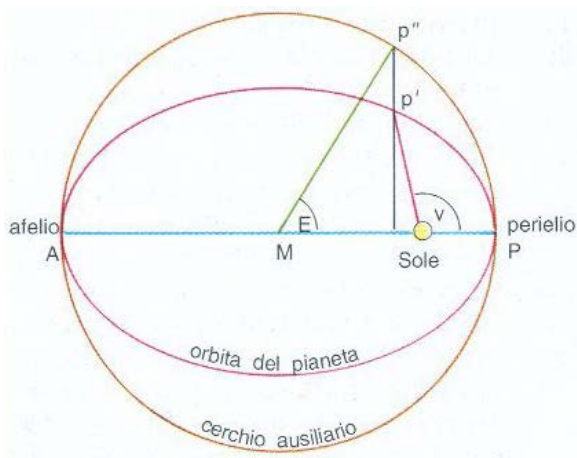
pianeta	distanza media dal Sole	periodo di rivoluzione	quadrato del periodo	cubo della distanza media
Mercurio	0,387	0,241	0,058	0,058
Venere	0,723	0,615	0,378	0,378
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	3,538	3,540
Giove	5,203	11,860	140,700	140,800
Saturno	9,539	29,460	867,900	868,000

L'anomalia

Attorno ad un'ellissi planetaria si tracci un cerchio che ne abbia in comune il centro (M) e il cui raggio sia uguale al semiasse maggiore dell'ellisse.

Si indichi allora con *anomalia vera* V l'angolo che ha vertice nel Sole e per lati le direzioni del *perielio* P e del pianeta P' sulla sua orbita.

Per l'*anomalia eccentrica* E , si proietti la posizione P' del pianeta sul cerchio ausiliario con una perpendicolare al semiasse maggiore dell'ellisse ottenendo P'' : allora E è l'angolo che ha per vertice il centro dell'ellisse e per lati le direzioni del perielio P e di P'' .



L'*anomalia media* M è l'angolo che ha ancora per vertice il Sole e i cui lati sono la direzione del perielio e la direzione del corpo ideale che si muove attorno al Sole con velocità angolare costante e con periodo uguale a quello del pianeta allo studio.

L'equazione di Keplero dà un legame fra eccentricità, anomalia media e anomalia eccentrica:

$$E - e \sin E = M$$

dove e è l'eccentricità numerica.

La legge di gravitazione universale

Isaac Newton enunciò la *legge di gravitazione universale*, una teoria matematica che spiegava i movimenti dei corpi celesti. Tale legge permise di dare le fondamenta al sistema copernicano e di interpretare le perturbazioni gravitazionali che hanno luogo fra i corpi celesti. La si esprime così: tutte le masse dell'universo si attraggono reciprocamente, con una forza K direttamente proporzionale al prodotto delle masse (m_1 e m_2) e inversamente proporzionale al quadrato della distanza relativa r :

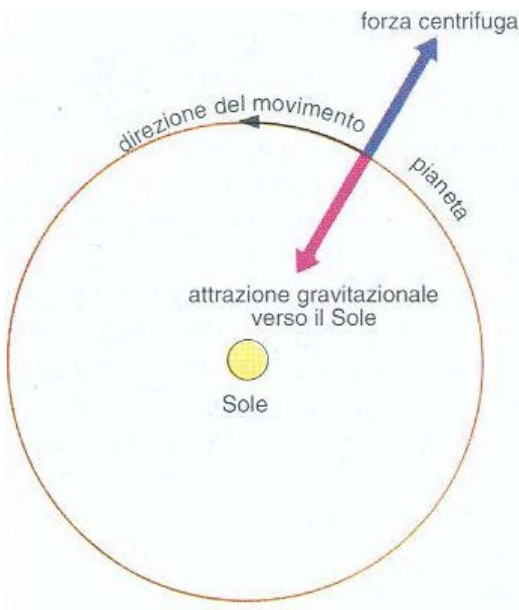
$$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G è la *costante di gravitazione universale*, uguale a $6.67 \times 10^{-11} \text{ N/m}^2 \text{kg}^2$.

Dalla legge di gravitazione universale si possono dedurre le tre leggi di Keplero; la terza legge, per un singolo pianeta, può esprimersi nella forma

$$\frac{a^3}{P^2 (M + m)} = \frac{G}{4\pi^2}$$

dove M e m sono ancora rispettivamente le masse del Sole e del pianeta e $\pi = 3.14$.

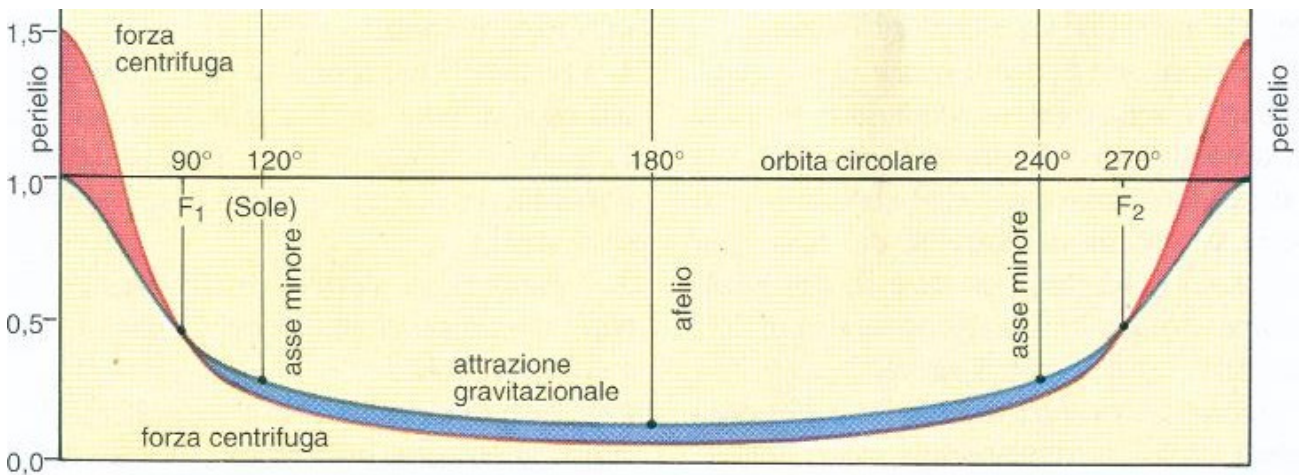


Un pianeta descrive un'orbita stabile quando non precipita sul Sole a causa dell'attrazione di questo, né viene lanciato lontano dalla forza centrifuga che si esercita sull'orbita: l'attrazione gravitazionale del Sole e la forza centrifuga devono compensarsi. La *forza centrifuga* Z dipende dalla massa m del pianeta, dalla sua velocità v , dal raggio r di curvatura dell'orbita, nonché dalla distanza del pianeta dal Sole:

$$Z = \frac{mv^2}{r}$$

La *velocità circolare* v_k è la velocità necessaria per mantenere l'equilibrio tra forza centrifuga e attrazione da parte del Sole a una certa distanza r . La velocità reale è leggermente inferiore, in quanto il pianeta si muove su

un'ellisse. La forza centrifuga supera l'attrazione gravitazionale quando il pianeta si allontana dal Sole; viceversa prevale l'attrazione da parte del Sole quando a questo ritorna ad avvicinarsi il pianeta. Il diagramma illustra l'andamento della forza di attrazione e della forza centrifuga su un'orbita ellittica con eccentricità $e = 0.5$.



Naturalmente, le leggi di Keplero, la legge di gravitazione ecc., valgono anche per il moto di un satellite attorno a un pianeta, per il moto delle componenti di una stella doppia ecc.